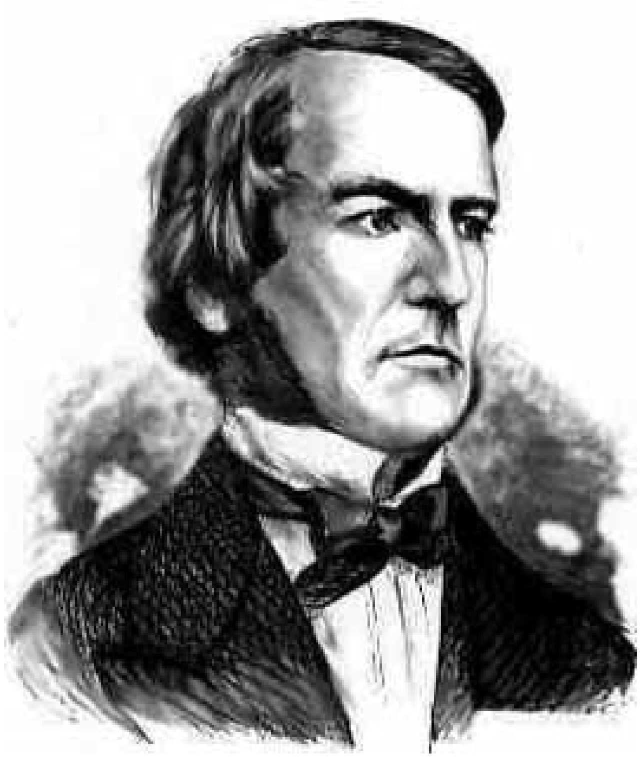
TEMA 3. Álgebra de Boole

INDICE:



Boole (1815-1864)

EL ÁLGEBRA DE BOOBLE

UN **ÁLGEBRA DE BOOLE** ES UN SISTEMA DE ELEMENTOS **B**={0,1} Y LOS OPERADORES BINARIOS (·) y (+) y (’) DEFINIDOS DE LA SIGUIENTE FORMA

A	B	A+B	A·B
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

A	A’
0	1
1	0

OPERADOR + → OPERADOR OR
OPERADOR · → OPERADOR AND
OPERADOR ‘ → OPERADOR NOT

QUE CUMPLEN LAS SIGUIENTES PROPIEDADES:

1.- PROPIEDAD CONMUTATIVA:

$$A + B = B + A$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

2. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA:

$$A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$$

$$A + B\cdot C = (A+B)\cdot(A+C)$$

3. ELEMENTOS NEUTROS DIFERENTES

$$A + 0 = A$$

$$A \cdot 1 = A$$

4. SIEMPRE EXISTE EL COMPLEMENTO DE A, DENOMINADO A’

$$A + A' = 1$$

$$A \cdot A' = 0$$

- ✓ **PRINCIPIO DE DUALIDAD**: cualquier teorema o identidad algebraica deducible de los postulados anteriores puede transformarse en un segundo teorema o identidad válida sin mas que intercambiar (+) por (·) y 1 por 0.
- ✓ **CONSTANTE**: cualquier elemento del conjunto **B**
- ✓ **VARIABLE**: símbolo que representa un elemento arbitrario del álgebra, ya sea constante o fórmula completa.

TEOREMAS DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

TEOREMA 1: el elemento complemento A' es único.

TEOREMA 2 (ELEMENTOS NULOS): para cada elemento de B se verifica:

$$A+1 = 1$$
$$A\cdot 0 = 0$$

TEOREMA 3: cada elemento identidad es el complemento del otro.

$$0'=1$$
$$1'=0$$

TEOREMA 4 (IDEMPOTENCIA): para cada elemento de B, se verifica:

$$A+A=A$$
$$A\cdot A=A$$

TEOREMA 5 (INVOLUCIÓN): para cada elemento de B, se verifica:

$$(A')' = A$$

TEOREMA 6 (ABSORCIÓN): para cada par de elementos de B, se verifica:

$$A+A\cdot B=A$$
$$A\cdot(A+B)=A$$

TEOREMA 7: para cada par de elementos de B, se verifica:

$$A + A'\cdot B = A + B$$
$$A \cdot (A' + B) = A \cdot B$$

TEOREMA 8 (ASOCIATIVIDAD): cada uno de los operadores binarios (+) y (·) cumple la propiedad asociativa:

$$A+(B+C) = (A+B)+C$$
$$A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$$

LEYES DE DEMORGAN: para cada par de elementos de B, se verifica:

$$(A+B)' = A'\cdot B'$$
$$(A\cdot B)' = A' + B'$$

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS (I)

TABLA DE VERDAD

Tabla que representa el valor de la función para cada combinación de entrada. Si la función está definida para todas las combinaciones se llama **completa**, si no, se denomina **incompleta**. Para 4 variables:

	X_3	X_2	X_1	X_0	$F(X_3, X_2, X_1, X_0)$
(0)	0	0	0	0	F(0,0,0,0)
(1)	0	0	0	1	F(0,0,0,1)
(2)	0	0	1	0	F(0,0,1,0)
(3)	0	0	1	1	F(0,0,1,1)
(4)	0	1	0	0	F(0,1,0,0)
(5)	0	1	0	1	F(0,1,0,1)
(6)	0	1	1	0	F(0,1,1,0)
(7)	0	1	1	1	F(0,1,1,1)
(8)	1	0	0	0	F(1,0,0,0)
(9)	1	0	0	1	F(1,0,0,1)
(10)	1	0	1	0	F(1,0,1,0)
(11)	1	0	1	1	F(1,0,1,1)
(12)	1	1	0	0	F(1,1,0,0)
(13)	1	1	0	1	F(1,1,0,1)
(14)	1	1	1	0	F(1,1,1,0)
(15)	1	1	1	1	F(1,1,1,1)

Una **Fórmulas de conmutación** es la expresión de una función Lógica.

- Un **LITERAL** es una variable (A) o complemento de una variable (A')
- Un **TÉRMINO PRODUCTO** es una operación AND de un número de literales.
- Una **fórmula normal disyuntiva** es una suma de términos productos.
- Un **TÉRMINO SUMA** es una operación OR de un número de literales.
- Una **fórmula normal conjuntiva** es un producto de términos sumas.

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS (II)

FÓRMULA CANÓNICA DISYUNTIVA (SOP)

- **MINTÉRMINO (m_i)**: término producto en el que aparecen todas las variables, ya sean complementadas o sin complementar.
- **FÓRMULA CANÓNICA DISYUNTIVA O DE MINTÉRMINOS**: suma de mintérminos. (Suma de Productos)

  Dada la lista completa de mintérminos y asignando 1's y 0's arbitrariamente a las variables, siempre hay un, y sólo un, mintérmino que toma el valor 1.

  Un mintérmino es un término producto que es 1 exactamente en una línea de la tabla de Verdad.

  La fórmula compuesta por todos los mintérminos será idénticamente 1.

  Cada fórmula de conmutación puede expresarse como suma de mintérminos. Y esa fórmula es única.

  NOTACIÓN: Un mintérmino se designa por "m_i" siendo i el número decimal correspondiente de la tabla de verdad. Para el producto, el 0 se asocia a la variable complementada y el 1 a la variable sin complementar.

EJEMPLO:

C	B	A	F(C,B,A)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$F(C,B,A) = m_0 + m_2 + m_3 + m_7 = \Sigma\, m(0,2,3,7)$$

$$F(C,B,A) = C'\cdot B'\cdot A' + C'\cdot B\cdot A' + C'\cdot B\cdot A + C\cdot B\cdot A$$

O bien

$$F(C,B,A) = \overline{C}\cdot\overline{B}\cdot\overline{A} + \overline{C}\cdot B\cdot\overline{A} + \overline{C}\cdot B\cdot A + C\cdot B\cdot A$$

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS (III)

FÓRMULA CANÓNICA CONJUNTIVA (POS)

- **MAXTÉRMINO (M_i)**: término suma en el que aparecen todas las variables, ya sean complementadas o sin complementar.
- **Fórmula Canónica Conjuntiva o de Maxtérminos**: producto de maxtérminos. (Producto de sumas)

  Dada la lista completa de maxtérminos y asignando 1's y 0's arbitrariamente a las variables, siempre hay un y sólo un maxtérmino que toma el valor 0.

  Un maxtérmino es un término suma que es 0 exactamente en una línea de la tabla de verdad.

  La fórmula compuesta por todos los maxtérminos será idénticamente 0.

  Cada fórmula puede expresarse como producto de maxtérminos. Y es única.

  NOTACIÓN: Un maxtérmino se designa por "M_i" siendo i el número decimal correspondiente de la tabla de verdad. En la suma, el 1 se asocia a la variable complementada y el 0 a la variable sin complementar.

EJEMPLO:

C	B	A	F(C,B,A)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$F(C,B,A) = M_1 \cdot M_4 \cdot M_5 \cdot M_6 = \prod M(1,4,5,6)$$

$$F(C,B,A) = (C+B+A') \cdot (C'+B+A) \cdot (C'+B+A') \cdot (C'+B'+A)$$

O bien

$$F(C,B,A) = (C+B+\overline{A}) \cdot (\overline{C}+B+A) \cdot (\overline{C}+B+\overline{A}) \cdot (\overline{C}+\overline{B}+A)$$

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS (IV)

CONVERSIÓN Y MANIPULACIÓN DE FÓRMULAS

- El complemento de una fórmula de mintérminos está formado por la suma de los mintérminos que no aparecen.
- El complemento de una fórmula de maxtérminos está formado por el producto de los maxtérminos que no aparecen.

$$m_i' = M_i$$

$$M_i' = m_i$$

- La transformación de una fórmula de mintérminos (disyuntiva) en otra de maxtérminos (conjuntiva) se basa en la doble complementación,

$$(F')' = F$$

* * *

Para **FUNCIONES INCOMPLETAS** en la tabla de verdad aparecerá una **X** o una letra **d** (del inglés don't care) refiriéndose a términos sin especificar.

C	B	A	F(C,B,A)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	X
1	0	0	0
1	0	1	X
1	1	0	0
1	1	1	1

$$F(C,B,A) = \sum m(0,2,7) + \Phi(3,5)$$

$$F(C,B,A) = \prod M(1,4,6) \cdot \Phi(3,5)$$

Complemento de una función incompleta: otra función incompleta con los mismos términos "no importa" y el complemento de la función completa.

Las fórmulas de mintérminos y de maxtérminos de las funciones incompletas no son únicas.

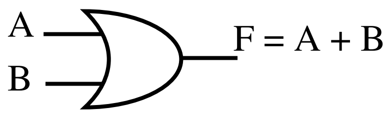
FUNCIONES BÁSICAS (I)

FUNCIÓN OR, PUERTA OR:

Tabla de Verdad

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Símbolo

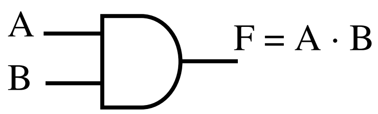


FUNCIÓN AND, PUERTA AND:

Tabla de Verdad

A	B	A·B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Símbolo

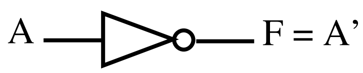


FUNCIÓN NOT, INVERSOR:

Tabla de Verdad

A	A’
0	1
1	0

Símbolo



Con estos tres tipos de puertas puede realizarse cualquier función de conmutación.

Un **CONJUNTO DE PUERTAS COMPLETO** es aquel con el que se puede implementar cualquier función lógica.

- Puerta AND, puerta OR e INVERSOR
- Puerta AND e INVERSOR
- Puerta OR e INVERSOR

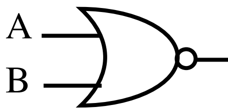
FUNCIONES BÁSICAS (II)

FUNCIÓN NOR, PUERTA NOR: Es también un conjunto completo

Tabla de Verdad

A	B	(A+B)’
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Símbolo



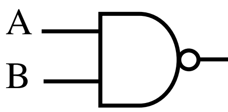
$F = (A + B)'$
$F = A' \cdot B'$

FUNCIÓN NAND, PUERTA NAND: Es también un conjunto completo

Tabla de Verdad

A	B	(A·B)’
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Símbolo



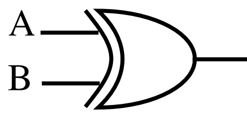
$F = (A \cdot B)'$
$F = A' + B'$

FUNCIÓN XOR, PUERTA XOR: Es también un conjunto completo

Tabla de Verdad

A	B	(A⊕B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Símbolo



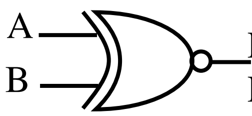
$F = (A \oplus B)$
$F = A'B + AB'$

FUNCIÓN XNOR, PUERTA XNOR: Es también un conjunto completo

Tabla de Verdad

A	B	(A⊕B)’
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Símbolo

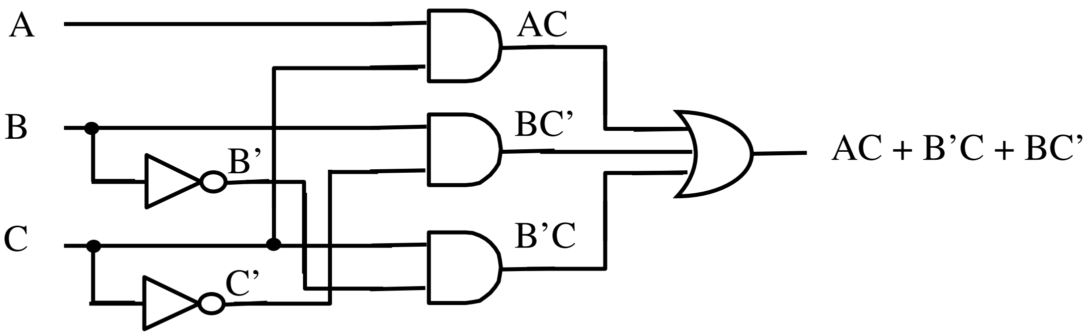


$F = (A \oplus B)'$
$F = AB + A'B'$

IMPLEMENTACIÓN DE FUNCIONES BOOLEANAS MEDIANTE CONJUNTOS COMPLETOS (I)

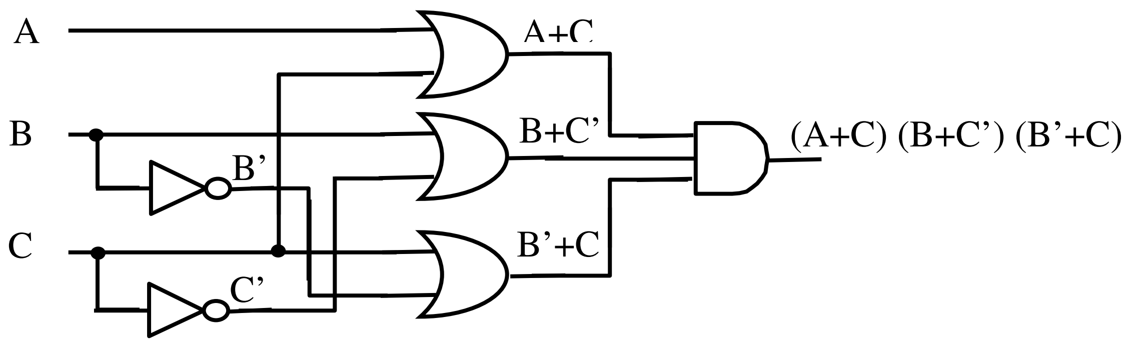
- **NOT-AND-OR** (preferentemente con SUMA de PRODUCTOS)

  Ejemplo 1: F(A,B,C) = AC + B'C + BC'



- **NOT-OR-AND** (preferentemente con PRODUCTO de SUMAS)

  Ejemplo 2: F(A,B,C) = (A+C) (B+C') (B'+C)



IMPLEMENTACIÓN DE FUNCIONES BOOLEANAS MEDIANTE CONJUNTOS COMPLETOS (II)

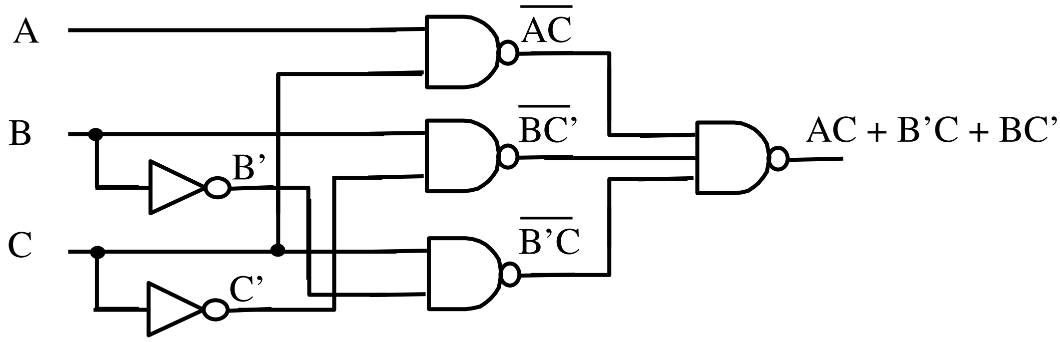
- **NAND-NAND** (preferentemente con SUMA de PRODUCTOS)

  Buscamos grupos de variables con la forma de salida de una puerta NAND.

  Ejemplo 1: $F(A,B,C) = AC + B'C + BC'$

  Negamos 2 veces $\overline{\overline{F(A,B,C)}} = \overline{\overline{AC + B'C + BC'}}$

  Aplicamos DeMorgan $F(A,B,C) = \overline{\overline{AC} \cdot \overline{B'C} \cdot \overline{BC'}}$



- **NOR-NOR** (preferentemente con PRODUCTO de SUMAS)

  Buscamos grupos de variables con la forma de salida de una puerta NOR.

  Ejemplo 2: $F(A,B,C) = (A+C)\ (B+C')\ (B'+C)$

  Negamos 2 veces $\overline{\overline{F(A,B,C)}} = \overline{\overline{(A+C)\ (B+C')\ (B'+C)}}$

  Aplicamos DeMorgan $F(A,B,C) = \overline{\overline{(A+C)} + \overline{(B'+C)} + \overline{(B+C')}}$